Über die Verträglichkeitsbedingungen in einem Cosseratschen Kontinuum

Kessel, Siegfried

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 17, 1965, S.51-61

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Über die Verträglichkeitsbedingungen in einem *Cosserat*schen Kontinuum

Von Siegfried Kessel

vorgelegt von H. Schaefer

(Eingegangen am 11. 5. 1965)

Übersicht: Es werden die Verträglichkeitsbedingungen und die *Weingarten-Volterra*schen Sprungbedingungen für ein mehrfach zusammenhängendes *Cosserat*sches Kontinuum abgeleitet. Die Verträglichkeitsbedingungen erweisen sich als natürliche Bedingungen des Prinzips von *Castigliano.*

Summary: The conditions of compatibility and the jump conditions of Weingarten and Volterra are derived for a multiply connected Cosserat-continuum. The equations of compatibility are shown to be natural conditions of Castiglianos principle.

1. Einleitung

Deutet man in der klassischen, linearen Elastizitätstheorie die Definitionsgleichungen des Deformationstensors

$$\frac{1}{2}(\partial_i u_k + \partial_k u_i) = \varepsilon_{ik}$$

als ein System von Differentialgleichungen für das Verschiebungsvektorfeld u_k, so liefert die Integration dieser Differentialgleichungen ein in einem Gebiet G eindeutiges Vektorfeld u_k, wenn das Tensorfeld ε_{ik} in G gewissen Verträglichkeitsbedingungen genügt. In einem einfach zusammenhängenden Gebiet G lauten diese Bedingungen bekanntlich:

$$e_{ilp}\, e_{kmq}\, \partial_l\, \partial_m\, \varepsilon_{pq} = 0\ ;$$

ist G mehrfach zusammenhängend, so muß das Deformationstensorfeld ε_{ik} noch zusätzlich integralen Bedingungen genügen. Alle diese Bedingungen kann man entweder durch einfache kinematische Überlegungen herleiten [1], [2], oder aus dem *Castigliano*schen Variationsprinzip als natürliche Bedingungen erhalten [3].

Läßt man die Forderung nach Eindeutigkeit des Verschiebungsvektorfeldes in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet G fallen, setzt aber immer noch Stetigkeit und zweimalige Differenzierbarkeit des Tensorfeldes ε_{ik} sowie die Erfüllung der differentiellen Verträglichkeitsbedingungen in G voraus, so erhält man die *Weingarten-Volterra*schen Sprungbedingungen für das Verschiebungsvektorfeld, die in der Versetzungstheorie von Bedeutung sind [4], [5], [6]. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Verträglichkeits- und Sprungbedingungen für die Kinematik des *Cosserat*schen Kontinuums abzuleiten.

2. Die Kinematik des *Cosserat*schen Kontinuums

Im *Cosserat*schen Kontinuum hat jeder Punkt 6 kinematische Freiheitsgrade: 3 Freiheitsgrade der Tran lation und 3 Freiheitsgrade der Rotation. Um von der Drehung eines Punktes sprechen zu können, denken wir uns jeden Punkt als Träger eines starren Dreibeins. Mit Drehung des Punktes meinen wir dann die Drehung des Dreibeins relativ zu einem raumfesten, cartesischen Bezugssystem. Im unverformten Ausgangszustand sollen alle Dreibeine parallel zum raumfesten Koordinatensystem ausgerichtet sein. Durch Verschiebung und Drehung der Punkte überführen wir das Kontinuum in einen verformten Zustand, wobei wir voraussetzen wollen, daß die Gradienten der Verschiebungsvektorkomponenten $\partial_i u_k (x_1, x_2, x_3) \ll 1$ sind und die Drehungen der starren Dreibeine durch Drehvektoren $\Phi_k (x_1, x_2, x_3)$ beschrieben werden dürfen. Der Deformationszustand des *Cosserat*schen Kontinuums ist dann durch die folgenden Tensorfelder charakterisiert:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (\partial_i u_k + \partial_k u_i) \tag{1}$$

$$\varphi_i = \Phi_i - \frac{1}{2} e_{ikl} \partial_k u_l \tag{2}$$

$$\varkappa_{ik} = \partial_i \Phi_k \tag{3}$$

ε_{ik} ist der symmetrische Verschiebungsdeformationstensor, φ_i der Verdrehungsdeformationsvektor, der den Unterschied zwischen der Absolutdrehung Φ_i und der Verschiebungsdrehung angibt, und $\varkappa_{ik}$ ist der Krümmungstensor.

Wir rechnen in cartesischen Koordinaten und schreiben ∂_i als Abkürzung für den Gradientenoperator $\frac{\partial}{\partial x_i}$; e_{ikl} ist der vollständig antisymmetrische Permutationstensor ($e_{123} = +1, e_{132} = -1, e_{113} = 0$ usw.), und wir benutzen die *Einstein*sche Summationsregel: über doppelt vorkommende Indizes wird von 1 bis 3 summiert.

Aus (1) und (2) bilden wir den nicht symmetrischen Deformationstensor:

$$\gamma_{ik} = \varepsilon_{ik} - e_{ikl} \varphi_l \, . \tag{4}$$

Für den Gradiententensor des Verschiebungsvektorfeldes erhalten wir dann:

$$\partial_i u_k = \gamma_{ik} + e_{ikl} \Phi_l \, . \tag{5}$$

Fassen wir nun (3) und (5) als Differentialgleichungen für Φ_k und u_k auf, so lassen sich die Lösungen dieser Differentialgleichungen schreiben [7]:

$$\Phi_k (P) = \Phi_k (P_0) + \int_{P_0}^{P} \varkappa_{mk} \, d\xi_m \, , \tag{6}$$

$$\begin{aligned} u_k (P) &= u_k (P_0) + e_{klm} \Phi_l (P_0) (x_m (P) - x_m (P_0)) + \\ &+ \int_{P_0}^{P} [\gamma_{mk} + e_{klt} (x_t (P) - \xi_t) \varkappa_{ml}] \, d\xi_m \, ; \end{aligned} \tag{7}$$

$u_k (P_0)$ und $\Phi_k (P_0)$ sind der Verschiebungsvektor und der Drehvektor in einem Punkte P_0 mit den Koordinaten $x_k (P_0)$; ξ_i ist ein Punkt auf dem Integrationswege von P_0 nach P. Wenn die Linienintegrale in (6) und (7) in einem Gebiet G wegunabhängig sind, erhalten wir in G stetige und eindeutige Vektorfelder Φ_k und u_k. Das ist dann der Fall, wenn die vorgegebenen Tensorfelder $\varkappa_{ik}$ und γ_{ik} den Verträglichkeitsbedingungen in G genügen.

3. Verträglichkeitsbedingungen in einem einfach zusammenhängenden Körper

In einem einfach zusammenhängenden Körper V seien die Tensorfelder γ_{ik} und $\varkappa_{ik}$ als einmal stetig differenzierbare Funktionen gegeben ($\gamma_{ik}, \varkappa_{ik} \in C^1$ in V). Nehmen wir an, daß die Linienintegrale in (6) und (7) wegunabhängig sind, so haben diese Integrale für beliebige geschlossene Wege in V den Wert Null:

$$\oint_K \varkappa_{ml}\, d\,\xi_m = 0\,, \tag{8}$$

$$\oint_K [\gamma_{mk} + e_{kli}\,(x_i\,(P) - \xi_i)\,\varkappa_{ml}]\, d\,\xi_m = 0\,. \tag{9}$$

Berücksichtigen wir in (9) die Gleichungen (8), so erhalten wir:

$$\oint_K [\gamma_{mk} - e_{kli}\,\xi_i\,\varkappa_{ml}]\, d\,\xi_m = 0\,. \tag{10}$$

In V läßt sich jede geschlossene Kurve K als Randkurve einer ganz in V liegenden Fläche f auffassen. Mit Hilfe des *Stokes*schen Satzes lassen sich nun die Integrale (8) und (10) in Flächenintegrale über eine solche Fläche f umformen:

$$\iint_f e_{ipq}\,\partial_p\,\varkappa_{ql}\,n_i\,d\,f = 0\,, \tag{11}$$

$$\iint_f e_{ipq}\,\partial_p\,(\gamma_{qk} - e_{kli}\,x_i\,\varkappa_{ql})\,n_i\,d\,f = 0\,, \tag{12}$$

wobei n_i der Normaleneinheitsvektor eines Flächenelementes $d\,f$ ist. Da die Fläche f beliebig ist, folgen aus (11) und (12) die insgesamt 18 differentiellen Verträglichkeitsbedingungen:

$$e_{ipq}\,\partial_p\,\varkappa_{qk} = 0\,, \tag{13}$$

in V.

$$e_{ipq}\,\partial_p\,\gamma_{qk} + \delta_{ik}\,\varkappa_{qq} - \varkappa_{ki} = 0 \tag{14}$$

Diese Bedingungen sind notwendig und hinreichend für die Existenz eindeutiger Verschiebungs- und Drehvektorfelder in V.

4. Verträglichkeitsbedingungen in einem zweifach zusammenhängenden Körper

In einem zweifach zusammenhängenden Körper V seien γ_{ik} und $\varkappa_{ik} \in C^1$ gegeben, und wir setzen voraus, daß die Verträglichkeitsbedingungen (13) und

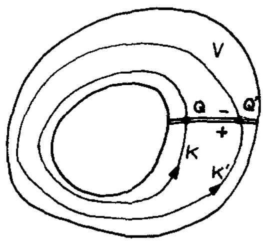

Abb. 1

(14) in V erfüllt sind. Wegen des zweifachen Zusammenhangs gibt es jetzt aber geschlossene Kurven K in V, in die sich keine Fläche einspannen läßt, die ganz

in V liegt, und wir können aus (13) und (14) nicht schließen, daß die Linienintegrale über K verschwinden.

Durch einen Schnitt S entsteht aus V der einfach zusammenhängende Körper V'. Die Werte von u_k und Φ_k auf den beiden Schnittufern von S nennen wir u_k^+, Φ_k^+ und u_k^-, Φ_k^-. Wir bezeichnen den Sprung dieser Vektorfelder beim Durchgang durch die Schnittfläche S an der Stelle Q mit:

$$[u_k]\,(Q) \equiv u_k^+\,(Q) - u_k^-\,(Q)\,, \tag{15}$$

$$[\Phi_k]\,(Q) \equiv \Phi_k^+\,(Q) - \Phi_k^-\,(Q)\,, \tag{16}$$

und wir verlangen:

$$[u_k] = 0\,, \tag{17}$$

$$[\Phi_k] = 0 \tag{18}$$

auf S.

Aus (6) und (7) erhalten wir:

$$[u_k]\,(Q) = \int_K [\gamma_{mk} + e_{kli}\,(x_i\,(Q) - \xi_i)\,\varkappa_{ml}]\,d\,\xi_m = 0\,, \tag{19}$$

$$[\Phi]_k\,(Q) = \int_K \varkappa_{lk}\,d\,\xi_l = 0\,; \tag{20}$$

und für einen beliebigen Punkt Q' auf S:

$$[u_k]\,(Q') = \int_{K'} [\gamma_{mk} + e_{kli}\,(x_i\,(Q') - \xi_i)\,\varkappa_{ml}]\,d\,\xi_m = 0\,, \tag{19a}$$

$$[\Phi_k]\,(Q') = \int_{K'} \varkappa_{ek}\,d\,\xi_l = 0\,. \tag{20a}$$

Aus (20) und (20a) folgt die erste Integralbedingung für die Verträglichkeit der Deformationstensorfelder:

$$\oint_K \varkappa_{lk}\,d\,\xi_l = 0\,, \tag{21}$$

für jede das Loch umschließende Kurve K.

Mit (21) ergibt sich dann aus (19) und (19a) die zweite Integralbedingung:

$$\oint_K [\gamma_{mk} - e_{kli}\,\xi_i\,\varkappa_{ml}]\,d\,\xi_m = 0\,, \tag{22}$$

für jede das Loch umschließende Kurve K. Da in V die differentiellen Verträglichkeitsbedingungen nach Voraussetzung erfüllt sind, genügt es, wenn diese integralen Bedingungen auf irgend einer Kurve K erfüllt sind, die sich in V nicht auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

In einem n-fach zusammenhängenden Körper V ergeben sich aus γ_{ik} und $\varkappa_{ik}$ in V eindeutige und stetige Vektorfelder u_k und Φ_k, wenn neben den differentiellen Verträglichkeitsbedingungen in V noch $2\,(n-1)$ Integralbedingungen der oben angegebenen Art erfüllt sind.

5. Die *Weingarten-Volterra*schen Sprungbedingungen

Wir betrachten wieder einen zweifach zusammenhängenden Körper V, der durch einen Schnitt S zu einem einfach zusammenhängenden Körper V' zerschnitten ist (Abb. 1). In V seien den differentiellen Verträglichkeitsbedingungen genügende γ_{ik} und $\varkappa_{ik} \in C^1$ vorgegeben. Wir beantworten unter diesen Voraussetzungen die Frage, ob für das Drehvektorfeld Φ_k und das Verschiebungsvektorfeld u_k Unstetigkeiten auf S möglich sind.

Mit (6) und (7) wird:

$$[u_k]\,(Q) = \int_K [\gamma_{mk} + e_{kli}\,(x_i\,(Q) - \xi_i)\,\varkappa_{ml}]\,d\,\xi_m\,, \tag{23}$$

$$[\Phi]_k\,(Q) = \int_K \varkappa_{mk}\,d\,\xi_m\,; \tag{24}$$

und

$$[u_k]\,(Q') = \int_{K'} [\gamma_{mk} + e_{kli}\,(x_i\,(Q') - \xi_i)\,\varkappa_{ml}]\,d\,\xi_m\,, \tag{23a}$$

$$[\Phi_k]\,(Q') = \int_{K'} \varkappa_{mk}\,d\,\xi_m\,. \tag{24a}$$

Wegen der Stetigkeit von $\varkappa_{ik}$ in der Schnittfläche S gilt:

$$\int_{Q'}^{Q} \overset{-}{\varkappa}_{mk}\,d\,\xi_m = -\int_{Q}^{Q'} \overset{+}{\varkappa}_{mk}\,d\,\xi_m\,, \tag{25}$$

und wegen der Gültigkeit von (13) in V' schließlich:

$$\oint_{K'} \varkappa_{mk}\,d\,\xi_m = \oint_K \varkappa_{mk}\,d\,\xi_m\,, \tag{26}$$

so daß wir für den Drehsprung $[\Phi_k]$ einen über S konstanten Vektor a_k erhalten:

$$[\Phi_k] = a_k\,. \tag{27}$$

Mit diesem Ergebnis wird:

$$[u_k]\,(Q) = \oint_K [\gamma_{mk} - e_{kli}\,\xi_i\,\varkappa_{ml}]\,d\,\xi_m + e_{kli}\,a_l\,x_i\,(Q) \tag{28}$$

und

$$[u_k]\,(Q') = \oint_{K'} [\gamma_{mk} - e_{kli}\,\xi_i\,\varkappa_{ml}]\,d\,\xi_m + e_{kli}\,a_l\,x_i\,(Q')\,. \tag{28a}$$

Da in V' die Verträglichkeitsbedingungen (14) gelten, und auch γ_{ik} über S stetig ist, werden die Kurvenintegrale in (28) und (28a) einander gleich. Für den Verschiebungssprung in S erhalten wir somit:

$$[u_k]\,(Q') = [u_k]\,(Q) + e_{kli}\,a_l\,(x_i\,(Q') - x_i\,(Q)\,)\,. \tag{29}$$

Bezeichnen wir den Verschiebungssprung an der festen Stelle Q mit b_k:

$$[u_k]\,(Q) = b_k\,, \tag{30}$$

so bedeutet

$$[u_k]\,(Q') = b_k + e_{kli}\,a_l\,(x_i\,(Q') - x_i\,(Q)\,)\,, \tag{29a}$$

daß die beiden Schnittufer von S um diese infinitesimale starre Bewegung auseinanderrücken dürfen, wenn man nach dem „Verschweißen“ von V' zu V, in V einen überall eindeutigen und stetigen Deformationszustand erhalten will (Eigenspannungszustand).

Außerdem zeigt sich, daß ein Drehsprung allein mit den oben angegebenen Voraussetzungen über γ_{ik} und $\varkappa_{ik}$ nicht verträglich ist.

Sind in einem zweifach zusammenhängenden Körper die für die Unstetigkeiten des Verschiebungs- und Drehvektorfeldes charakteristischen Konstanten a_k und

b_k vorgegeben, so haben die Deformationstensorfelder γ_{ik} und $\varkappa_{ik}$ neben den differentiellen Bedingungen (13) und (14) in V noch den Integralbedingungen:

$$\oint_K \varkappa_{mk}\, d\,\xi_m = a_k \tag{31}$$

$$\oint_{K_Q} [\gamma_{mk} - e_{kli}\,\xi_i\,\varkappa_{ml}]\, d\,\xi_m = b_k - e_{kli}\,a_l\,x_i\,(Q) \tag{32}$$

zu genügen, wobei K_Q eine das Loch umschließende Kurve durch den Punkt Q ist.

Die Gleichungen (27) und (29a) stimmen formal überein mit den im klassischen Kontinuum geltenden Formeln von *Weingarten* und *Volterra* [2], [6]. Man nennt den Verschiebungssprung (29a) eine *Volterra*sche Distorsion.

6. Sprungbedingungen im klassischen Kontinuum

Zum Abschluß der kinematischen Überlegungen behandeln wir als einen Sonderfall das klassische Kontinuum, in dem

$$\varphi_k \equiv 0 \tag{33}$$

gesetzt wird. Daraus folgt

$$\Phi_k = \frac{1}{2}\,e_{klm}\,\partial_l\,u_m\,, \tag{34}$$

$$\gamma_{mk} = \varepsilon_{mk} = \varepsilon_{(mk)} \tag{35}$$

und

$$\varkappa_{ml} = \partial_m\,\Phi_l = e_{lpq}\,\partial_p\,\varepsilon_{qm}\,, \tag{36}$$

denn es ist:

$$\partial_m\,\Phi_l = \frac{1}{2}\,e_{lpq}\,\partial_m\,\omega_{pq}\,,$$

$$\omega_{pq} = \frac{1}{4}\,e_{pqi}\,e_{ikl}\,(\partial_k\,u_l - \partial_l\,u_k)\,,$$

$$\partial_m\,\omega_{pq} = \frac{1}{2}\,e_{pqi}\,e_{ikl}\,(\partial_k\,\varepsilon_{ml} - \partial_l\,\varepsilon_{mk})\,.$$

Aus (31) und (32) ergeben sich dann die bekannten *Weingarten*schen Formeln:

$$\oint_K e_{lpq}\,\partial_p\,\varepsilon_{qm}\,d\,\xi_m = a_l\,, \tag{37}$$

$$\oint_{K_Q} \{\,\varepsilon_{mk} - e_{kli}\,\xi_i\,e_{lpq}\,\partial_p\,\varepsilon_{qm}\,\}\,d\,\xi_m = b_k - e_{kli}\,a_l\,x_i\,(Q)\,. \tag{38}$$

7. Ableitung der Verträglichkeitsbedingungen aus dem Prinzip von *Castigliano*

In der klassischen Elastizitätstheorie folgen aus dem Variationsprinzip von *Castigliano* differentielle und integrale Verträglichkeitsbedingungen als natürliche Bedingungen, wie *Stickforth* [3] gezeigt hat.

Ein *Castigliano*sches Variationsprinzip läßt sich auch in der linearen Elastizitätstheorie des *Cosserat*schen Kontinuums formulieren, und wir zeigen jetzt, daß sich sowohl die differentiellen als auch die integralen Verträglichkeitsbedingungen in einem mehrfach zusammenhängenden, einfach berandeten Körper als natürliche Bedingungen des Minimalprinzips ergeben.

Wir betrachten einfachheitshalber einen zweifach zusammenhängenden Körper V aus elastischem *Cosserat*schem Material, der in V durch Volumenkräfte X_i und Volumenmomente Y_i und auf der Oberfläche F durch Kraftspannungen p_i und Momentenspannungen q_i belastet ist. Die elastische Energiedichte des Materials sei $W(\gamma_{ik}, \varkappa_{ik})$. Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie lautet dann [8]:

$$\delta \left\{ \int_V (W(\gamma_{ik}, \varkappa_{ik}) - X_i u_i - Y_i \Phi_i)\, dV - \int_F (p_i u_i + q_i \Phi_i)\, dF \right\} = 0, \tag{39}$$

bei Beachtung der Zwangsbedingungen:

$$\gamma_{ik} - \partial_i u_k + e_{ikl} \Phi_l = 0, \tag{40}$$

in V.

$$\varkappa_{ik} - \partial_i \Phi_k = 0, \tag{41}$$

Wir beschränken uns auf Körper, für die keine kinematischen Zwangsbedingungen auf F vorgeschrieben sind.

Zu (39) gehören die natürlichen Bedingungen:

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ik}}, \tag{42}$$

$$\mu_{ik} = \frac{\partial W}{\partial \varkappa_{ik}}, \tag{43}$$

welche die Definitionen der Kraft- und Momentenspannungen darstellen,

$$\partial_i \sigma_{ik} = X_k, \tag{44}$$

in V,

$$\partial_i \mu_{ik} + e_{klm} \sigma_{lm} = Y_k \tag{45}$$

die Gleichgewichtsbedingungen, und schließlich die Oberflächenbedingungen:

$$n_i \sigma_{ik} = p_k, \tag{46}$$

auf F;

$$n_i \mu_{ik} = q_k \tag{47}$$

n_i ist der äußere Normaleneinheitsvektor eines Flächenelementes dF. Eine *Friedrich*sche Transformation [9] liefert uns nun das *Castigliano*sche Variationsprinzip des *Cosserat*schen Kontinuums:

Im Gleichgewichtsfall ist

$$\delta \int_V W^*(\sigma_{ik}, \mu_{ik})\, dV = 0 \tag{48}$$

unter den Zwangsbedingungen (44) bis (47); $W^*(\sigma_{ik}, \mu_{ik})$ ist durch eine *Legendre*sche Transformation aus $W(\gamma_{ik}, \varkappa_{ik})$ entstanden:

$$W^*(\sigma_{ik}, \mu_{ik}) = \gamma_{ik} \sigma_{ik} + \varkappa_{ik} \mu_{ik} - W(\gamma_{ik}, \varkappa_{ik}). \tag{49}$$

Dementsprechend ist

$$\frac{\partial W^*}{\partial \sigma_{ik}} = \gamma_{ik}, \tag{50}$$

und

$$\frac{\partial W^*}{\partial \mu_{ik}} = \varkappa_{ik}. \tag{51}$$

Die homogenen Gleichgewichtsbedingungen (44) und (45) werden identisch erfüllt durch den Spannungsfunktionsansatz [7]:

$$\sigma_{ik}^{(H)} = e_{ipq}\, \partial_p\, F_{qk}\,, \tag{52}$$

$$\mu_{ik}^{(H)} = e_{ipk}\, \partial_p\, G_{qk} + \delta_{ik}\, F_{pp} - F_{ki}\,, \tag{53}$$

mit den nicht symmetrischen Spannungsfunktionstensoren F_{ik} und G_{ik}. Bezeichnen wir mit $\sigma_{ik}^{(P)}$ und $\mu_{ik}^{(P)}$ Partikularlösungen der inhomogenen Gleichgewichtsbedingungen, dann sind

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(P)} + \sigma_{ik}^{(H)} \tag{54}$$

und

$$\mu_{ik} = \mu_{ik}^{(P)} + \mu_{ik}^{(H)} \tag{55}$$

dei allgemeinen Lösungen der Gleichungen (44) bis (47). Wir denken uns die Deformationstensoren in

$$\int_V (\gamma_{ik}\, \delta\, \sigma_{ik} + \varkappa_{ik}\, \delta\, \mu_{ik})\, d\, V = 0 \tag{56}$$

durch Spannungsfunktionen ausgedrückt und erfüllen die Bedingungen

$$\partial_i\, \delta\, \sigma_{ik} = 0\,, \qquad \partial_i\, \delta\, \mu_{ik} + e_{klm}\, \delta\, \sigma_{lm} = 0 \qquad \text{in } V, \tag{57}$$

$$n_i\, \delta\, \sigma_{ik} = 0\,, \qquad n_i\, \delta\, \mu_{ik} = 0 \qquad \text{auf } F \tag{58}$$

für $\delta\, \sigma_{ik}$ und $\delta\, \mu_{ik}$ durch die Ansätze

$$\delta\, \sigma_{ik} = e_{ipq}\, \partial_p\, \delta\, F_{qk}\,, \tag{59}$$

in V,

$$\delta\, \mu_{ik} = e_{ipq}\, \partial_p\, \delta\, G_{qk} + \delta_{ik}\, \delta\, F_{qq} - \delta\, F_{ki}\,, \tag{60}$$

mit

$$n_i\, e_{ipq}\, \partial_p\, \delta\, F_{qk} = 0\,, \tag{61}$$

auf F.

$$n_i\, (e_{ipq}\, \partial_p\, \delta\, G_{qk} + \delta_{ik}\, \delta F_{qq} - \delta F_{ki}) = 0 \tag{62}$$

Die Gleichung (56) lautet dann:

$$\int_V \{ \gamma_{ik}\, e_{ipk}\, \partial_p\, \delta\, F_{qk} + \varkappa_{ik}\, (e_{ipq}\, \partial_p\, \delta\, G_{qk} + \delta_{ik}\, \delta\, F_{pp} - \delta\, F_{ki}\,) \}\, d\, V = 0\,, \tag{63}$$

aus der sich nach partieller Integration und Anwendung des *Gauß*schen Satzes ergibt:

$$\int_V \{ [e_{ipq}\, \partial_p\, \gamma_{qk} + \delta_{ik}\, \varkappa_{pp} - \varkappa_{ki}]\, \delta\, F_{ik} + [e_{ipq}\, \partial_p\, \varkappa_{qk}]\, \delta\, G_{ik} \}\, d\, V + \\ + \int_F n_l\, e_{ilm}\, (\gamma_{mk}\, \delta\, F_{ik} + \varkappa_{mk}\, \delta\, G_{ik})\, d\, F = 0\,. \tag{64}$$

Da die Variationen $\delta\, F_{ik}$ und $\delta\, G_{ik}$ in V willkürlich sind, erhalten wir in V die differentiellen Verträglichkeitsbedingungen

$$e_{ipq}\, \partial_p\, \varkappa_{qk} = 0\,, \tag{13}$$

und

$$e_{ipq}\, \partial_p\, \gamma_{qk} + \delta_{ik}\, \varkappa_{qq} - \varkappa_{ki} = 0\,. \tag{14}$$

Die Spannungsfunktionsvariationen im Flächenintegral müssen die homogenen Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Das erreichen wir, wenn wir in einer

Umgebung von F [10], [11] δF_{ik} und δG_{ik} als Nullspannungsfunktionen schreiben [7]:

$$\delta F_{ik} = \partial_i f_k, \tag{65}$$

$$\delta G_{ik} = \partial_i g_k - e_{ikl} f_l . \tag{66}$$

Wir setzen voraus, daß δF_{ik} und δG_{ik} in der Umgebung von F eindeutige Funktionen $\in C^1$ sind.

Mit (65) und (66) wird das Flächenintegral in (63):

$$\int_F n_l e_{lim} (\gamma_{mk} \partial_i f_k + \varkappa_{mk} [\partial_i g_k - e_{ikl} f_l]) \, d F = 0 . \tag{67}$$

Durch partielle Integration erhalten wir:

$$\int_F n_l e_{lim} \{ \partial_i (\gamma_{mk} f_k) + \partial_i (\varkappa_{mk} g_k) - \\ - (\partial_i \gamma_{mk} + \varkappa_{ml} e_{ilk}) f_k - \partial_i \varkappa_{mk} g_k \} \, d F = 0 . \tag{68}$$

Die beiden letzten Terme im Integranden liefern wegen der Willkürlichkeit von f_k und g_k in der Umgebung von F, die auf F fortgesetzten differentiellen Verträglichkeitsbedingungen. Die ersten beiden Terme lassen sich über den *Stokes*schen Satz in ein Kurvenintegral umformen; dabei ist die Oberfläche F zu einer einfach zusammenhängenden Fläche F' kanonisch aufzuschneiden [10].

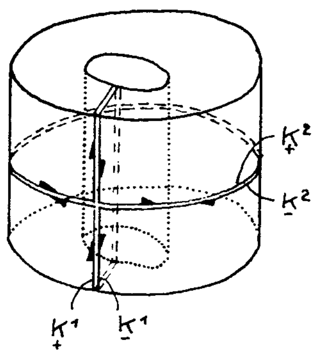

Abb. 2

Die Randkurve K der Fläche F ist: $K = \underset{+}{K^{(1)}} + \underset{-}{K^{(2)}} + \underset{-}{K^{(1)}} + \underset{+}{K^{(2)}}$.

Wir erhalten das Kurvenintegral

$$\oint_K (\gamma_{mk} f_k + \varkappa_{mk} g_k) \, d \xi_m = 0 . \tag{69}$$

Da γ_{mk} und $\varkappa_{mk}$ auf F stetig sind, lassen sich z. B. die Integrale

$$\oint_{\underset{+}{K^{(1)}}} \gamma_{mk} f_k \, d \xi_m + \oint_{\underset{-}{K^{(1)}}} \gamma_{mk} f_k \, d \xi_m$$

zu einem Integral über $K^{(1)}$ zusammenfassen, wobei im Integranden die Sprungfunktion $[f_k]$ erscheint:

$$\oint \gamma_{mk} [f_k] \, d \xi_m .$$

Wir können deshalb das Kurvenintegral (69) als Summe von zwei Kurvenintegralen schreiben:

$$\oint_{\substack{K^{(1)}\\+}} \{ \gamma_{mk} [f_k] + \varkappa_{mk} [g_k] \} d\,\xi_m + \\ + \oint_{\substack{K^{(2)}\\+}} \{ \gamma_{mk} [f_k] + \varkappa_{mk} [g_k] \} d\,\xi_m = 0 \,. \tag{70}$$

Da wir die Variationen δF_{ik} und δG_{ik} in der Umgebung von F als stetig vorausgesetzt haben, liefern die *Weingarten-Volterra*schen Sprungbedingungen (27) und (29)

$$[f_k] = a_k \tag{71}$$

$$[g_k] = c_k + e_{kli}\, a_l\, \xi_i \tag{72}$$

mit beliebigen infinitesimalen konstanten Vektoren a_k und c_k; ξ_i ist ein Punkt auf der Schnittkurve K.

Die Gleichung (70) lautet dann:

$$a_k \{ \oint_{\substack{K^{(1)}\\+}} (\gamma_{mk} + \varkappa_{ml}\, e_{lki}\, \xi_i)\, d\,\xi_m \} + c_k \{ \oint_{\substack{K^{(1)}\\+}} \varkappa_{mk}\, d\,\xi_m \} + \\ + a_k \{ \oint_{\substack{K^{(2)}\\+}} (\gamma_{mk} + \varkappa_{ml}\, e_{lki}\, \xi_i)\, d\,\xi_m \} + c_k \{ \oint_{\substack{K^{(2)}\\+}} \varkappa_{mk}\, d\,\xi_m \} = 0 \,. \tag{73}$$

Die Kurvenintegrale über $K^{(1)}$ sind Null, weil jede in $K^{(1)}$ eingespannte Fläche V ganz in V liegt und in V die differentiellen Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind.

Da a_k und c_k willkürlich sind, ergeben sich schließlich aus (73) die integralen Verträglichkeitsbedingungen:

$$\oint_{\substack{K^{(2)}\\+}} (\gamma_{mk} - \varkappa_{ml}\, e_{kli}\, \xi_i)\, d\,\xi_m = 0 \tag{32}$$

und

$$\oint_{\substack{K^{(2)}\\+}} \varkappa_{mk}\, d\,\xi_m = 0 \,. \tag{31}$$

Die Erweiterung der in diesem Abschnitt abgeleiteten Ergebnisse auf n-fach zusammenhängende Körper ($n > 2$) bereitet keine Schwierigkeiten.

Wir haben damit gezeigt, daß alle Bedingungen für die Verträglichkeit eines *Cosserat*schen Deformationszustandes natürliche Bedingungen des *Castigliano*schen Variationsprinzips sind; ein Ergebnis, das nach den Erfahrungen aus der klassischen Elastizitätstheorie zu erwarten war.

Literatur

[1] *A. E. H. Love:* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity; Cambridge University Press (1952).

[2] *B. A. Boley* und *J. H. Weiner:* Theory of Thermal Stresses; New York (1960).

[3] *J. Stickforth:* Zur Anwendung des Castiglianoschen Prinzips und der Beltramischen Spannungsfunktionen bei mehrfach zusammenhängenden elastischen Körpern unter Berücksichtigung von Eigenspannungen; Techn. Mitt. Krupp, Forsch. Ber. 22, (1964).

[4] *F. R. N. Nabarro:* The Mathematical Theory of Stationary Dislocations; Adv. Phys. **1**, (1952).

[5] *G. Weingarten:* Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi; Rend. Accad. Lincei (5) **10** (1901).

[6] *V. Volterra:* Sur l'èquilibre des corps élastiques multiplement connexes; Ann. École Norm. (3) 24 (1907).

[7] *W. Günther.* Zur Statik und Kinematik des Cosseratkontinuums, Abhdlg. d. Brschw. Wiss. Ges., Band X (1958).

[8] *S. Kessel:* Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums; Abhdlg. d. Brschw. Wiss. Ges., Band XVI (1964).

[9] *R. Courant* und *D. Hilbert:* Methods of Mathematical Physics; Interscience Publishers (1960).

[10] *G. Rieder:* Topologische Fragen in der Theorie der Spannungsfunktionen; Abhdl. d. Brschw. Wiss. Ges., Band XII (1960).

[11] *H. Schaefer:* Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums; statische Deutung und Randwerte; Ing. Arch. **28** (1959).